



TITLE:

# 三次曲線の迷走と円錐曲線族(多様体の特異点の最近の成果)

AUTHOR(S):

成木, 勇夫

---

CITATION:

成木, 勇夫. 三次曲線の迷走と円錐曲線族(多様体の特異点の最近の成果). 数理解析研究所講究録 1984, 535: 161-175

ISSUE DATE:

1984-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98658>

RIGHT:

## 三次曲線の迷走と円錐曲線族

成 木 勇 天

0.  $P_2$  に作用する例外的有限群として、古典的に位数 216 の Hesse 群 (HS と記す)、位数 84 の Klein 群 (KL)、位数 360 の Valentiner-Wiman 群 (VW) がよく知られていた。KL は  $PSL(2, 7)$  と、VW は  $A_6$  (6 次交代群) と同型である。VW と KL に関しては、それに付随する円錐曲線族の図形も知られていた。この小述では それらを三次曲線の迷走という立場から説明するとともに、HS に対しても最も自然と思われる 1 つの円錐曲線図形を対応させてみよう。

1. 複素射影平面  $P_2: (x, y, z)$  上に 3 つの円錐曲線  $Q_1: q_1 = 0$ ,  $Q_2: q_2 = 0$ ,  $Q_3: q_3 = 0$  ( $q_i$  達は  $x, y, z$  の 2 次形式) を考えると、一般に円錐曲線全体の空間 ( $\cong P_5$ ) 内にそれらで張られる平面  $H(Q_1, Q_2, Q_3): (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

$$\xi_1 q_1 + \xi_2 q_2 + \xi_3 q_3 = 0$$

が定まる。 $Q_1, Q_2, Q_3$  は非退化と仮定しておく。また:

混同の恐れがない限り以後、 $H(Q_1, Q_2, Q_3)$  を  $H$  と記すことにする。 $H$  上には、その上の特別な3点、即ち、 $Q_1, Q_2, Q_3$  が与えられている。したがって、それらを結んで出来る三角形  $\Delta = \Delta(Q_1, Q_2, Q_3)$  も又、自然に定まっている。他方、 $H$  上にある退化円錐曲線全体は  $H(\cong P_2)$  の3次曲線を作る【(3,3)-行列の行列式は要素の3次式】。これを  $DS (= \text{discriminant})$  とかく。こうして、 $H$  上に2つの自然な3次曲線  $\Delta, DS$  が出来たことになる。さて、今、或る円錐曲線

$$Q : q(x, y, z) = 0$$

が、 $Q_1, Q_2, Q_3$  のどれをと、ても2点で接すると仮定する。このとき、 $x, y, z$  の1次形式  $l_1, l_2, l_3$  及び、3つの定数  $a_1, a_2, a_3 (\neq 0)$  があって、

$$q = a_i q_i + l_i^2$$

と書ける。(  $l_i = 0$  は  $Q$  と  $Q_i$  の2接点を通る直線を定義する。) したがって、特に  $\Delta \cap DS$  内の3点

$$T_i: a_j q_j - a_k q_k = (l_k + l_j) \cdot (l_k - l_j) = 0$$

$$(1 \leq j < k \leq 3, \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\})$$

$q$  に対して定まるが、この3点は明らかに  $(H$  内で) 一直線上にある。この3点のことを  $Q$  の  $(Q_1, Q_2, Q_3$  に因する) boundary と呼ぶことにしよう。明らかにここで homology 代数が意識されているが、この用語に代えて、cycle とは、 $\Delta \cap DS$  の3点で一直線上にあるもののことを意味するべきである。(ここで、 $\Delta \cap DS$  は Bézout の定理により一般に9点より成ることに注意する。)

基本定理:  $Q_1, Q_2, Q_3, H, \Delta, DS$  を上のとおりとし、今  $\Delta \cap DS$  の3点  $(T_1, T_2, T_3)$  が上の意味で cycle であるとある。このとき、 $(T_1, T_2, T_3)$  を boundary として持つ円錐曲線  $Q$  が必ず存在する。 $T_1, T_2, T_3$  を通る曲線を  $L$  とする。もし  $L \not\subset DS$  ならば、そのような  $Q$  は一意であるが、 $L \subset DS$  ならば、そのような  $Q$  は丁度2つ存在する。

2. この基本定理を念頭におくとき、今の問題に用いて重要なことは、次のように要約されるであろう。

問:  $\Delta$  と  $DS$  とで生成される 3 次曲線の pencil  $[\Delta, DS]$  の中に、直線を既約成分として含むような 3 次曲線が多く現れるための条件は何か。

実際、 $[\Delta, DS]$  のメンバー達は 1 度 9 点  $\Delta \cap DS$  を通過する 3 次曲線達であるから、問にいうような既約成分があれば基本定理によりそれに対応して  $Q_1, Q_2, Q_3$  のどれにも 2 点に接するような円錐曲線を 1 つ (乃至 2 つ) 作ることもできるからである。もし  $[\Delta, DS]$  が他の三角形  $\nabla'$  を含むとし、簡単のために  $DS$  は  $\nabla'$  の辺を含まないと仮定する。このとき我々は  $\nabla'$  の 3 辺に対応して  $Q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) のどれにも 2 点に接するような 3 つの円錐曲線  $Q'_1, Q'_2, Q'_3$  を得る。この  $Q'_i$  達に対して、また  $H' (= H(Q'_1, Q'_2, Q'_3))$ ,  $\Delta'$ ,  $DS'$ ,  $[\Delta', DS']$  などが構成でき、基本定理によれば pencil  $[\Delta', DS']$  は  $Q_1, Q_2, Q_3$  と対応する三角形  $\nabla$  を含んでいる。この過程において我々は、平面 3 次曲線  $DS \subset H$  は平面 3 次曲線  $DS' \subset H'$  に動いたとみるのである。もし  $[\Delta, DS]$  が  $\Delta$  以外に 2 つ以上の三角形を含むならば、動き方も 2 つ以上あることになり、動いた先でも動き方が 2 つ以上ある

(二)が証明される)。このような運動を次に合わせて  
 いたものを 3 次曲線の迷走と呼んだのである。(勿論、  
 動いているのは  $DS$  のみでないことはいうまでもない。  
 迷走と呼んだのは 移行  $DS \rightarrow DS'$  は 不変量  $y$  も保た  
 ない性質のものだからである。) 我々の主題は この迷走  
 によってどの程度面白い円錐曲線図形を構成できるか、とい  
 うことにある。

3. ここで我々は  $[\Delta, DS]$  が Hesse pencil と  
 なっているような著しい場合を挙げる。(Hesse pencil  
 とは、9個の固定点か その全ての非特異メンバーに対して  
 変曲点となっていて、~~変曲点~~、特異メンバーは4つの三角形  
 であるようなものをいう。これは  $a$  をパラメーターと  
 する pencil

$$\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 - 3a\xi_1\xi_2\xi_3 = 0$$

と同型を除いて一致する。  $a = \infty, 1, \omega, \omega^2$  ( $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ ) に対して4つの三角形を得る。このとき  $P_2$   
 の座標を適当にとると、

$$G_0(\lambda_0) \begin{cases} Q_1 : \lambda_0 x^2 + 2yz = 0 \\ Q_2 : \lambda_0 y^2 + 2xz = 0 \\ Q_3 : \lambda_0 z^2 + 2xy = 0 \end{cases}$$

と書ける ( $\lambda$  はパラメーター)。このとき  $\Delta = \xi_1 \xi_2 \xi_3$ ,  $DS = \lambda_0 (\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3) - (\lambda_0 + 2) \xi_1 \xi_2 \xi_3$  となっていて、 $[\Delta, DS]$  は明らかに Hesse pencil であることが判る。 $G_0(\lambda_0)$  とかいたのは  $\lambda_0$  に依存したこの3つの円錐曲線のグループを指している。さて、前節に述べたことから、ここでも3通りの迷走が考えられる訳であるが、迷走の行、た先の受け皿として次の3つのグループを天下り式に与えてしまおう。

$$G_i(\lambda_i) \begin{cases} \lambda_i X_i^2 + 2Y_i Z_i = 0 \\ \lambda_i Y_i^2 + 2X_i Z_i = 0 \\ \lambda_i Z_i^2 + 2X_i Y_i = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3)$$

但し、 $\omega = \varepsilon^{1/3}$

$$\begin{cases} X_1 = x + y + z \\ Y_1 = x + \omega y + \omega^2 z \\ Z_1 = x + \omega^2 y + \omega z \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = \omega x + y + z \\ Y_2 = \omega^2 x + \omega y + z \\ Z_2 = x + y + \omega z \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_3 = \omega^2 x + y + z \\ Y_3 = x + \omega^2 y + z \\ Z_3 = x + y + \omega^2 z \end{cases}$$

こうして、4つのグループ  $G_i(\lambda_i)$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) が出来



たが、ここで我々は  $G_j(\lambda_j)$  の各々のメンバーが  $G_k(\lambda_k)$  の各々のメンバーと2点で接しているとき、この2つのグループは善隣関係にあるということにしよう。この関係は、2つが互いに迷走によって移り合うということと同値である。

定理 1. 任意の対  $0 \leq i \neq j \leq 3$  に対して1次分数関数  $f_{ij}(z)$  があって、 $G_i(\lambda_i)$  と  $G_j(\lambda_j)$  は  $\lambda_i = f_{ij}(\lambda_j)$  であるとき、またそのときに限って善隣関係にある。

ここで勿論  $f_{ij}(f_{ji}(z)) = z$  である。具体的には  $f_{ij}$  は次のように与えられる。

$$f_{10}(z) = -(2z+1)/(z+2), \quad f_{20}(z) = -(2\omega z+1)/(z+2\omega^2)$$

$$f_{30}(z) = -(2\omega^2 z+1)/(z+2\omega), \quad f_{21}(z) = -(2z+\omega)/(z+2\omega)$$

$$f_{31}(z) = -(2z+\omega^2)/(z+2\omega^2), \quad f_{32}(z) = f_{20}(z)$$

この形から、次のことが判る。

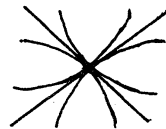
系 1. すべての三つ組  $0 \leq i, j, k \leq 3$  に対して、変換  $z \rightarrow f_{ki} \circ f_{ij} \circ f_{jk}(z)$  は、リーマン球上 唯一の固定点をもつ。

したがって、例えば 組  $(0, 1, 2)$  に対しては  $G_0(\omega)$ ,  $G_1(\omega^2)$ ,  $G_2(\omega^2)$  が互いに善隣関係にある。(これらに対して  $G_3(\lambda_3)$  は  $\lambda_3$  のどのような有限の値に対しても善隣関係にあることはできない。)

こうして得られた 9 組の円錐曲線族は  $3 \times 3 \times 3 \times 2 = 54$  組の接点を持つように思われるが、実はこれらは 3 組ずつ一致して、18 組の三重<sup>接</sup>点 ( $\times$ ) になる。残りの交点は 36 組の単純~~交~~交点 ( $\times$ ) である。このような図形を我々は (円錐曲線の) 小 Hesse 図形と呼ぶ。この図形は 次のような意味で非常に重要である。即ち、9 組の円錐曲線の合併である 18 次曲線が分岐する  $P_2$  の 2 重被覆を考えると、36 組の  $A_1$  と 18 組の  $\tilde{E}_2$  を持つ曲面となるが、この 18 組の特異点の complement は 2 次元超球の quotient となっていることが判るのである。このことは、最近の Hirzebruch の仕事に形を変えて現れて来るが、それは 小 Hesse 図形の別の構成と同様している。ここでは しかし このことに詳しく立ち入ることはできない。このような 小 Hesse 図形

を4個含むものか大16面図形なのであるが、それは別の3つの組  $(0, 1, 3)$ ,  $(0, 2, 3)$ ,  $(1, 2, 3)$  に対しても今の9個の円錐曲線の構成を繰り返して、全部を並列すれば出来る。この大図形は12本の直線  $x, y, z, X_i, Y_i, Z_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) の作3図形(16面の直線図形)の自己同型群  $H_S$  によって自分自身に写される。大図形は次のような奇妙な交り方をするが、今のところその正体ははっきりとは判らない。即ち、それは

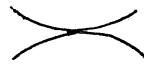
12本の



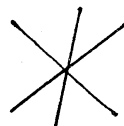
72本の



108本の



144本の



の形の交点を持ち、残りは全て単純交点となる。

4. 前節の4つのグループ  $G_i(\lambda_i)$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) を使って 有名な Valentiner - Wiman の図形を構成することができる。

系2.  $z = f_{03} \circ f_{31} \circ f_{12} \circ f_{20}(z)$  は  $2z^2 - z + 2 = 0$  と同値である。

そこで  $\lambda_0 = (1 \pm \sqrt{-15})/4$  とおき、 $\lambda_2 = f_{20}(\lambda_0)$ ,  $\lambda_1 = f_{12}(\lambda_2)$ ,  $\lambda_3 = f_{31}(\lambda_1)$  と順に定めると、自動的に  $\lambda_0 = f_{03}(\lambda_3)$  が満たされることになる。定理1により6組の内錐曲線  $G_0(\lambda_0)$ ,  $G_1(\lambda_1)$  の各々は、もう1組の6組の  $G_2(\lambda_2)$ ,  $G_3(\lambda_3)$  の各々と2点だけ接する。このような12組の内錐曲線は Valentiner - Wiman によって既に前世紀に求められていた。彼らは  $PSL(2, 9) \cong A_6$  の  $P_2$  への作用を具体的に構成したのだが、 $A_6$  は明らかに6組の二十面体群  $A_5$  を含んでいる。各々の  $A_5$  は1つずつ内錐曲線を不変にし、したがって6組の内錐曲線を得る。ところで  $PSL(2, 9)$  は  $Gal(F_9/F_3)$  の作用から来る外部自己同型を持ち、これによって最初の6組の

$A_5$  は 別の 6 個の  $A_5$  に写される。これに対応して、更に 6 個の円錐曲線が出来るのである。我々の構成から HS の一部分が この図形に作用することは判るのだが、 $G_2(\lambda_2)$ ,  $G_3(\lambda_3)$  などのグループ分は も、と大きな群  $A_6$  の作用では 意味がなくなってしまうのである。

5. 最後に Klein 群  $KL$  を 迷走によって構成してみよう。オミ節とは違って、ここでは  $[\Delta, DS]$  に次のような条件を課すことにする。

- i)  $DS$  もまた三角形である。
- ii)  $[\Delta, DS]$  は  $\Delta$ ,  $DS$  の他に もう 1 つの三角形を含む。
- iii)  $[\Delta, DS]$  は 円錐曲線と直線とから成る特異メンバーを含む。

このような条件の下で 組  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  は 次のような三つ組  $T(S)$  として与えられる。

$$T(s): \begin{cases} Q_1(s): & sx^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ Q_2(s): & x^2 + sy^2 + z^2 = 0 \\ Q_3(s): & x^2 + y^2 + sz^2 = 0 \end{cases}$$

ここでパラメータ  $s$  は容易に判るようにこのような三つ組の射影的不変量がある。明らかに  $T(s)$  は座標の入れ替えと符号の交換から生成される群  $\cong S_4$  により自分自身に写される。座標の符号交換から生成される Klein の四元群  $K$  は  $S_4$  の正規部分群である。ところで、条件 i) と基本定理から  $Q_i(s)$  達のいずれとも2点で接する6組の円錐曲線が得られるが、これは  $S_4$  の作用で互いに移り合う。この6組は  $K$  の作用では3組の orbits に分れる。この3つの orbits から1組ずつ勝手に取り出して合すると、合計8組の三つ組が生まれるが、そのうちの4組だけが  $T(s)$  と同じように i), ii), iii) を満たしている。但し、射影不変量  $s$  は今度は  $1/s$  に置きかわっている。この4組のうちから1つを選び、それを  $T'(1/s)$  と書き、これに対してまた同じ操作を施せばまた4組の三つ組 —  $T''_i(s)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) と書く — が得

くれるか。最初の  $T(s)$  は このうちの1つである。そこで  $T_1''(s)$  は  $T(s)$  と違うものとする。この2つは同じ射影不変量  $s$  を持つので、 $T(s)$  と  $T_1''(s)$  に写す non-trivial な射影変換  $L(s)$  が無くはない。そこで最初の  $S_4$  と  $L(s)$  とで生成される変換群を  $Ly(s)$  とする。

定理 2.  $Ly(s)$  は  $2s^2 + 3s + 2 = 0$  なるとき、またそのときに限って有限群となる。

ことが証明される。そして  $s = (-3 \pm \sqrt{-7})/4$  のとき  $Ly(s)$  は  $KL \cong PSL(2, 7)$  と同型になり、 $T(s)$  の orbit から 7 本の円錐曲線を得、 $T'(1/s)$  の orbit から 更に 7 本の円錐曲線が得られる。一方の組の各々には他方の組の各々と 2 点で接している。この 2 接点を結ぶことにより、49 本の直線を得るのであるが、これはまた  $KL$  の作用の orbits として 28 本と 21 本とに分れる。28 本の直線は 有名な Klein 4 次曲線の bitangents であり、21 本の方は  $KL$  の中の 21 本の reflexions の fixed point sets の 1 次成分たちである。このような構成の長所は、直接  $KL$  が  $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$  上に定義されることが判

3 という点にあると言える。